

Laurea Triennale in Informatica
Analisi Matematica

Nome e Cognome _____ Matricola n° _____ Firma _____

Esercizio 1. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |x + 1|e^{\frac{1}{x}}$$

indicando: dominio, andamenti asintotici, punti di non derivabilità (specificando il tipo), monotonia e punti di max/min locale. Disegnare un grafico approssimativo della funzione. Inoltre, calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto $(-2, f(-2))$.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x+x^3)} - \sin x + x^4 \left(\ln x - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^4} \right)}{\sqrt{1+x^3} - \ln(1+x^4) - \cos(x^2) + e^{-\frac{1}{x^2}}}.$$

Esercizio 3. Determinare la primitiva del seguente integrale indefinito

$$\int f(x) dx, \quad \text{dove } f(x) = \frac{\ln(x) + 2}{x(\ln^3(x) + 1)}.$$

Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ e, se esiste, calcolarne il valore.

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 - y^2,$$

4.1) determinare i suoi punti stazionari e il loro tipo;

4.2) calcolare la derivata della funzione f , nel punto $P = (1, 1)$, nella direzione del vettore $\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$;

4.3)* data la funzione $g(x, y) = \frac{x^\alpha + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $g(0, 0) = 0$, studiate la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f su \mathbb{R}^2 , al variare di $\alpha \geq 0$.

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -2e^{3x},$$

5.1) trovare le soluzioni della equazione omogenea associata;

5.2) trovare le soluzioni della equazione non-omogenea;

5.3) risolvere il problema di Cauchy della soluzione non omogenea con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Disclaimer. Autorizzo la pubblicazione dei risultati dell'esame sul sito del docente.